ANNO SCOLASTICO 2017/18

SIMULAZIONE DELLA PROVA DI MATEMATICA DELL'ESAME DI STATO

PER IL LICEO SCIENTIFICO

Il candidato risolva uno dei problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

Problema 1 – In pieno recupero

Il tuo comune ha commissionato allo studio di progettazione Urban2000 il recupero di un capannone in stile modernista per realizzarne una sala polivalente ed uno spazio espositivo.

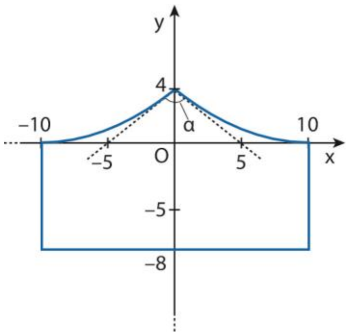

Figura 1

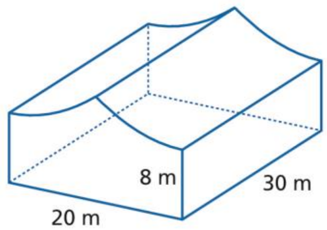

Figura 2

In figura 1 è rappresentata la forma della facciata; le dimensioni del capannone sono riportate, invece, in figura 2.

a. Individua, motivando la risposta, quale tra le seguenti funzioni, definite nell'intervallo $[-10;10]$, può descrivere il profilo del tetto in modo più preciso:

$$f_1(x) = 4 - \sqrt{\frac{8}{5}|x|}; \qquad f_2(x) = \frac{1}{25}(|x| - 10)^2.$$

Scrivi le equazioni delle due rette tangenti tratteggiate in figura 1 e valuta l'angolo α tra esse compreso.

Determina, inoltre, il volume occupato dall'edificio.

Il progetto prevede che al primo piano del capannone sia allestita una sala polivalente, in cui deve essere costruito un palco delimitato da un arco di parabola. La pianta della sala è rappresentata in figura 3 (le misure sono espresse in metri). Il piano di calpestio del palco viene rivestito con tre mani di una speciale vernice antigraffio, che può essere diluita con acqua fino al 15% del volume e costa 65 € a barattolo.

b. In base ai dati che puoi dedurre dal grafico, determina l'equazione dell'arco di parabola ed il costo minimo sostenuto per acquistare la vernice se quest'ultima, una volta diluita, ha una resa di 12 m^2 per barattolo.

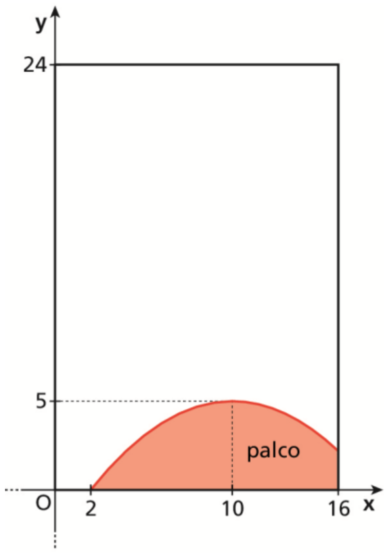

Figura 3

Il progetto prevede anche il recupero di cinque finestre per fornire luce alla sala. Ogni finestra ha la forma di un quadrato di lato 2 m sormontato da una zona il cui profilo superiore segue l'andamento della funzione $g(x)=|x|\sqrt{1-x^2}$.

c. Disegna il grafico della funzione $g(x)$ e studia i punti di non derivabilità.
d. Sapendo che il restauro delle vetrate costa 220 €/m^2, stima la spesa per il recupero delle finestre arrotondando il risultato alle decine di euro.

Problema 2

Fissato $\lambda \in R$, sia g_λ la funzione così definita:

$$g_\lambda(x)=x^3(x+\lambda).$$

a. Determina il valore di $\lambda \in R$ in modo che il grafico della funzione ammetta un flesso nel punto *F* di ascissa $x=-1$.

Verificato che risulta $\lambda=2$, indica con Γ il grafico corrispondente.

b. Rappresenta Γ dopo averne individuato le principali caratteristiche. Trova l'equazione della retta *t* tangente a Γ in *F*, le coordinate del punto *A*, ulteriore intersezione tra Γ e la retta *t*, e l'area della regione piana delimitata da tali curve.
c. Calcola le coordinate del punto *B*, appartenente all'arco *FA* e distinto da *F*, *t*ale che la tangente a Γ in *B* sia parallela a *t*.
d. Determina il valore λ del parametro in modo che $g_\lambda(x)$ sia simmetrica di $g_2(x)$ rispetto all'asse delle ordinate. Indica (motivando esaurientemente la risposta) se è possibile determinare un valore di λ in modo tale che $g_\lambda(x)$ sia simmetrica di $g_2(x)$ rispetto all'asse delle ascisse.

Considera, ora, la funzione $G: R \to R$ così definita:

$$G(x)=\int_{-2}^{x}|g_2(t)|\,dt .$$

e. Verifica che la funzione $G(x)$ non ammette estremi relativi né assoluti e calcola $G(-2)$, $G\left(-\frac{3}{2}\right)$ e $G(0)$, senza aver preventivamente trovato l'espressione analitica di tale funzione. Dopo aver trovato i punti stazionari di $G(x)$ e avere studiato la concavità della funzione, traccia un grafico indicativo.

Questionario

1. Dati il piano α di equazione $x-2y+z-1=0$ e i punti $A(5;1;-2)$ e $B(1;1;2)$, verifica che A e B appartengono a α e individua due punti C_1 e C_2 nel piano β perpendicolare a α e contenente la retta AB tali che i triangoli ABC_1 e ABC_2 siano equilateri.

2. Determina per quali valori dei parametri reali a e b il grafico della funzione

$$f(x)=\sqrt{ax^2+bx}-x$$

ammette come asintoto obliquo per $x\to+\infty$ la retta di equazione $y=2x+1$.

3. Determina il parametro reale positivo a in modo tale che i grafici delle funzioni

$$f(x)=\frac{ax-1}{3x}, \qquad g(x)=\frac{3}{x}$$

risultino ortogonali nel loro punto di intersezione P, quindi ricava le coordinate di P e le equazioni delle rette r e s tangenti in P ai grafici rispettivamente di $f(x)$ e $g(x)$.

4. Data la funzione

$$f(x)=\sqrt{x^2+3}-2x$$

e considerato un generico punto $P(0;k)$ dell'asse delle ordinate, dimostra che esistono rette tangenti al grafico di $f(x)$ passanti per P se e solo se $0<k\le\sqrt{3}$.

5. Assegnati nel piano cartesiano i punti $A(0;1)$, $B(2;2)$ e $C(3;k)$, ricava la funzione polinomiale di grado minimo il cui grafico ammetta un minimo relativo in A e in C e un massimo relativo in B, quindi ricava il valore di k e stabilisci quale sia il punto di minimo assoluto della funzione trovata.

6. Data la funzione

$$f(x)=\int_a^x \frac{e^{t-a}}{\sqrt{t^2+3}}\,dt,$$

dimostra che è monotona crescente in tutto il suo dominio. Determina poi, motivando adeguatamente la risposta, quale tra le seguenti rette può essere la tangente al suo grafico nel punto di ascissa $x=a$ e ricava di conseguenza il valore di a:

$$r_1: y=\frac{1}{2}x-1; \qquad r_2: y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}.$$

7. Verifica che la funzione $y=axe^x+be^x+x$ soddisfa l'equazione differenziale

$$y''-2y'+y=x-2$$

per ogni valore reale delle costanti a e b, quindi determina i valori di a e b per i quali si ha:

$$y(0)=2, \qquad y'(0)=0.$$

8. Vengono lanciati contemporaneamente una moneta e un dado a sei facce, entrambi non truccati, 5 volte. Il valore di ogni lancio è uguale all'esito del dado se esce testa, al suo doppio se esce croce.

a. Qual è la probabilità di totalizzare almeno sei punti con 5 lanci?

b. Se esce sempre 6, qual è la probabilità di realizzare 42 punti nei 5 lanci?

9. Data la funzione $f(x)=ae^{bx}$, determina i valori di a e b per i quali $f'(0)=8$ e $f^{(4)}(0)=64$. Dimostra che per i valori di a e b trovati è $f^{(n)}(x)=2^{n+2}e^{2x}$ e verifica che l'equazione $f^{(n+1)}(x)=f(0)\cdot f^{(n-1)}(x)$ è un'identità per ogni n naturale.

10. La regione R in figura è delimitata dall'asse x, dalla retta di equazione $x=1$ e da un arco della parabola di equazione $y=kx^2$, dove $k>0$ è un parametro reale.

Determina il valore di k in modo tale che il volume del solido ottenuto dalla rotazione completa di R intorno all'asse x sia uguale al volume del solido ottenuto dalla rotazione completa di R intorno all'asse y.